

RESISTANCE DES MATERIAUX

Référence au programme

S.T.I

4- Résistance de matériaux.

- 4-1 Hypothèses de la RDM
- 4-2 Etude d'une poutre
- 4-3 Identification de la nature des sollicitations
- 4-4 Etude des sollicitations simples

Référence au module

Module 4 : :Résistance des matériaux

1- Objectifs de la séquence :

*Définir les efforts de cohésion,
Définir la nature de sollicitations simples,
Définir la démarche de dimensionnement,
Modéliser les efforts de cohésion.*

2- Situation pédagogique :

prérequis

Modélisation des AM.

connaissances visées

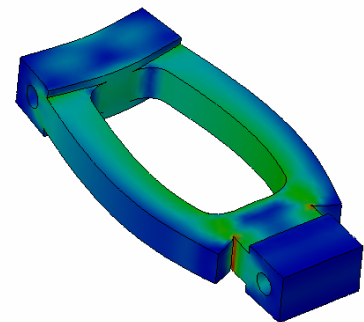
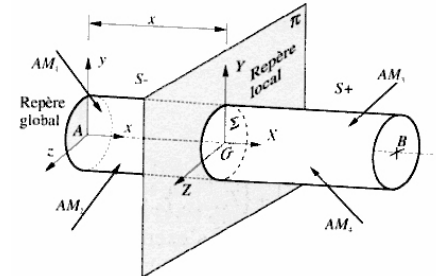
Modélisation des efforts de cohésion.

nature de la démarche

Acquisition de connaissances.

à savoir

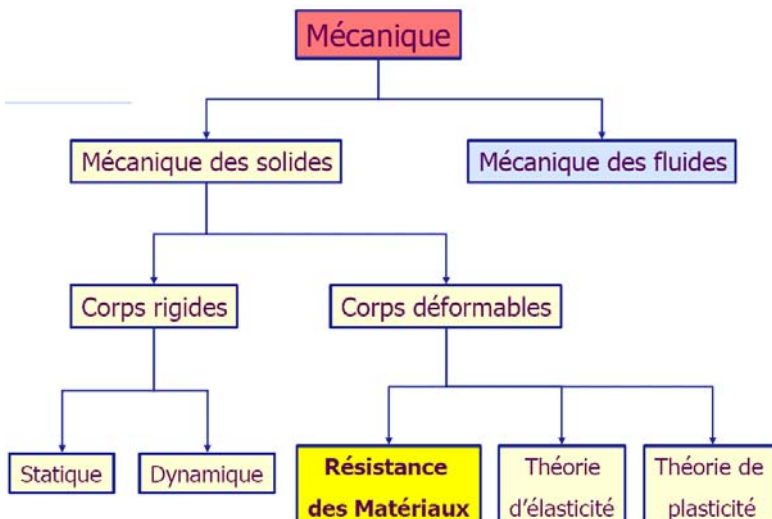
Modéliser les actions subies par le système.



1- A quoi ça sert ?

La Résistance Des Matériaux (RDM) permet de déterminer les formes, les dimensions et les matériaux de pièces mécaniques de façon à maîtriser leur résistance et leur déformation afin de répondre aux exigences du cahier des charges.

Cette science met en relation la statique, la cinématique (déformation) et les caractéristiques intrinsèques du matériau.



2- Hypothèses.

2-1- Matériaux.

Les matériaux seront considérés comme :

- **continus** : la structure fibreuse ou moléculaire des matériaux étant très petite devant les dimensions des pièces étudiées, on peut alors considérer le matériau comme **continu**.
- **homogènes** : on dit qu'un matériau est **homogène**, s'il possède les mêmes caractéristiques en tous ses points (hypothèse grossière pour des matériaux tels que le bois ou le béton).
- **isotropes** : on dit qu'un matériau est **isotrope**, lorsqu'il possède les mêmes caractéristiques dans toutes les directions (hypothèse non applicable pour des matériaux tels que le bois ou les matériaux composites).

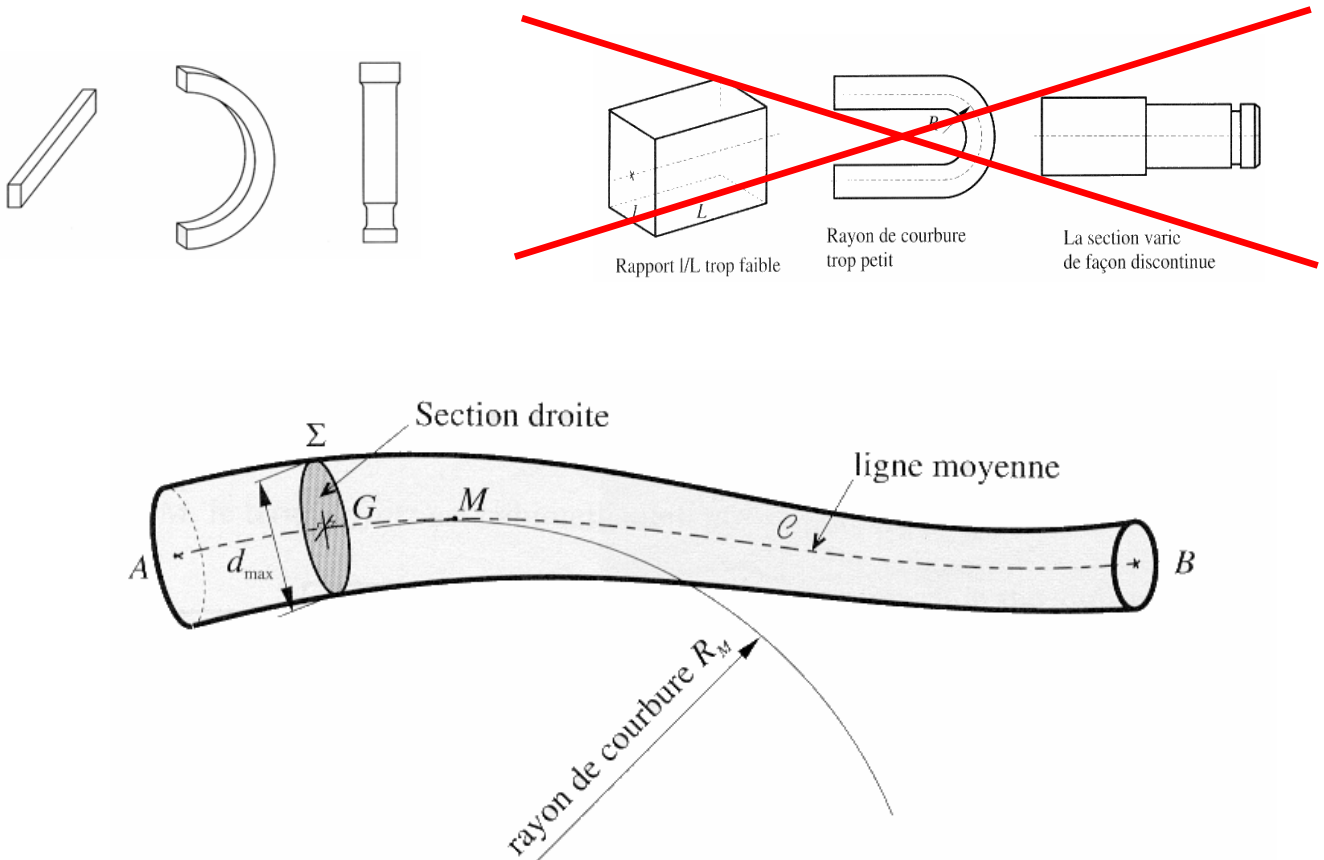
2-2- Géométrie des pièces étudiées.

La RDM est l'étude de pièces dont les formes sont relativement simples. On les appelle des **poutres**.

- **poutre** : on appelle poutre un solide engendré par une surface plane (Σ) dont le centre de surface G décrit une courbe plane (C) appelée **ligne moyenne**.

Les caractéristiques d'une poutre sont :

- ligne moyenne droite ou à grand rayon de courbure,
- surface plane (Σ) constante ou variant progressivement,
- grande longueur par rapport aux dimensions transversales,
- existence d'un plan de symétrie.

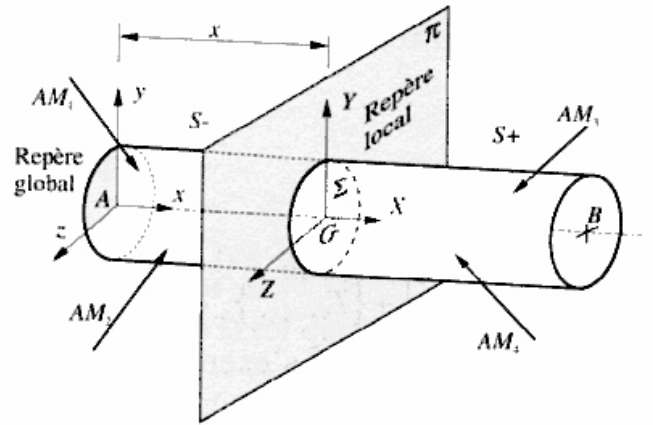


3- Torseur des efforts de cohésion.

3-1- Définition :

Soit une poutre (S) en équilibre sous l'action de n actions mécaniques extérieures. On associe à cette poutre un repère R (n,o,p) dont l'axe n coïncide avec la ligne moyenne de la poutre.

Coupons la poutre (S) par un plan (π) orthogonal à sa ligne moyenne, situé à l'abscisse x. On définit ainsi deux portions de poutre (S-) et (S+).



(S) étant en équilibre, nous pouvons écrire : $\{\bar{S} \rightarrow S\} = \{0\}$

(S-) étant en équilibre, nous pouvons écrire : $\{\bar{S} \rightarrow S_-\} + \{S_+ \rightarrow S_-\} = \{0\}$

(S+) étant en équilibre, nous pouvons écrire : $\{\bar{S} \rightarrow S_+\} + \{S_- \rightarrow S_+\} = \{0\}$

On en déduit que :

$$\{S_+ \rightarrow S_-\} = -\{\bar{S} \rightarrow S_-\} = \{\bar{S} \rightarrow S_+\}$$

$\{S_+ \rightarrow S_-\}$ est le torseur qui traduit l'action de contact de (S+) sur (S-).

Cette action est due aux efforts de cohésion qui permettent à la poutre de ne pas se "disloquer" sous l'effet d'actions extérieures.

La RDM vise en particulier à vérifier qu'en aucun point de la poutre les efforts de cohésion à "transmettre" ne soient supérieurs aux capacités du matériau.

On note :

$${}_G\{T_{coh}\} = -\{\bar{S} \rightarrow S_-\} = \{\bar{S} \rightarrow S_+\}$$

3-2- Composantes du torseur de cohésion :

La résultante et le moment du torseur de cohésion dépendent alors de la position de la coupure et donc de l'abscisse x.

$${}_G\{T_{coh}\} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{R}(x) \\ \vec{M}_G(x) \end{array} \right\}_R$$

${}_G\{T_{coh}\} = \left\{ \begin{array}{ll} N(x) & M_t(x) \\ T_y(x) & M_{fy}(x) \\ T_z(x) & M_{fz}(x) \end{array} \right\}_R$	Composantes	Dénominations	Sollicitations
	N	Effort normal	Traction - compression
	T_y	Effort tranchant sur o	Cisaillement
	T_z	Effort tranchant sur p	
	M_t	Moment de torsion	Torsion
	M_{fy}	Moment fléchissant sur o	Flexion
	M_{fz}	Moment fléchissant sur p	

Remarques :

- Les différentes sollicitations dépendant de l'abscisse x, nous pouvons les représenter graphiquement à l'aide de diagrammes.
- Lorsque l'on a une seule de ces sollicitation on parle de *sollicitation simple*, sinon on parle de *sollicitations composées*.

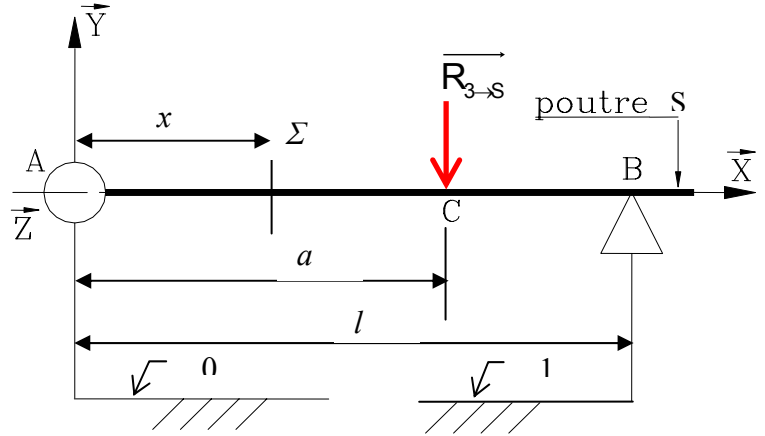
3-3- Exemple d'application :

Soit une poutre cylindrique, de 200 mm de long et de 5 mm de diamètre, soumise à une action mécanique modélisable par un glisseur avec $\vec{R}_{3 \rightarrow E}$ d'intensité 100 daN.

$$\vec{AC} = a \cdot \vec{x} ; a = 150 \text{ mm}$$

$$\vec{AB} = l \cdot \vec{x} ; l = 200 \text{ mm}$$

L'étude s'effectuera dans le plan de symétrie (n, o).



Objectif : déterminer le torseur de cohésion en fonction de x et tracer les diagrammes représentant les efforts de cohésion.

Détermination des actions mécaniques en A et en B.

Isolons (S).

Bilan des Actions Mécaniques Extérieures.

PFS appliqué à (S) en A.

Conclusion.

Détermination du torseur de cohésion.

Il faut étudier chaque portion de poutre comprise entre deux noeuds.

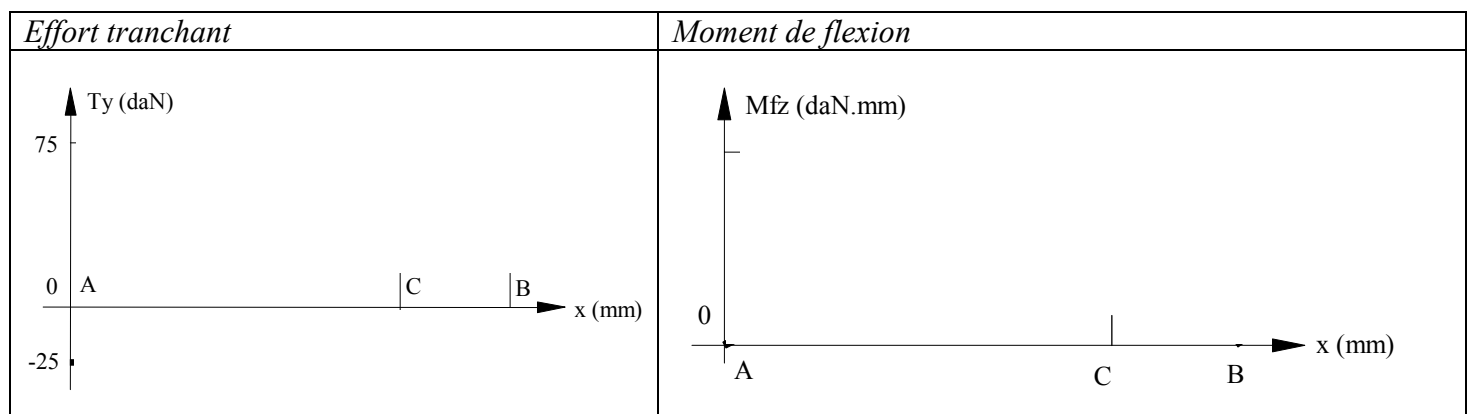
- Pour $x \in [0 ; a]$.

- Pour $x \in [a ; l]$.

Récapitulatif et diagrammes.

Sollicitation	$0 < x < a$	$a < x < l$
N	0	0
T_y	-25	75
T_z	0	0
M_t	0	0
M_{fy}	0	0
M_{fz}	$25.x$	$75(l-x)$

Tracer ci-dessous les diagrammes représentant l'effort tranchant et le moment de flexion.



4- Les différents types de sollicitation.

Traction ou Extension / Compression		${}_{G_S}\{T_{coh}\}_R = \begin{Bmatrix} N & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_R$
Cisaillement		${}_{G_S}\{T_{coh}\}_R = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ T_y & 0 \\ T_z & 0 \end{Bmatrix}_R$
Torsion		${}_{G_S}\{T_{coh}\}_R = \begin{Bmatrix} 0 & Mt \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_R$
Flexion pure		${}_{G_S}\{T_{coh}\}_R = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & Mfz \end{Bmatrix}_R$
Flexion simple		${}_{G_S}\{T_{coh}\}_R = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ T_y & 0 \\ 0 & Mfz \end{Bmatrix}_R$
Flexion + traction		${}_{G_S}\{T_{coh}\}_R = \begin{Bmatrix} N & 0 \\ T_y & 0 \\ 0 & Mfz \end{Bmatrix}_R$
Flexion + torsion		${}_{G_S}\{T_{coh}\}_R = \begin{Bmatrix} 0 & Mt \\ T_y & 0 \\ 0 & Mfz \end{Bmatrix}_R$
Flambage		${}_{G_S}\{T_{coh}\}_R = \begin{Bmatrix} N & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & Mfz \end{Bmatrix}_R$
Flexion déviée		${}_{G_S}\{T_{coh}\}_R = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ T_y & 0 \\ 0 & Mfz \end{Bmatrix}_R$ ${}_{G_S}\{T_{coh}\}_R = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & Mfy \\ T_z & 0 \end{Bmatrix}_R$

5- Contrainte en un point M d'une section Σ .

La contrainte caractérise les liaisons mécaniques internes au matériau (représentées par le torseur de cohésion $\{T_{coh}\}_R$) sur chaque **élément de surface** $d\Sigma$ de la section Σ quelconque. La détermination des contraintes nous permettra le dimensionnement des pièces mécaniques étudiées.

Unité : le N/mm^2 soit le Mpa

Rappel : $1 \text{ Mpa} = 10^6 \text{ Pa} = 1 \text{ N/mm}^2 = \text{environ } 10 \text{ bars}$

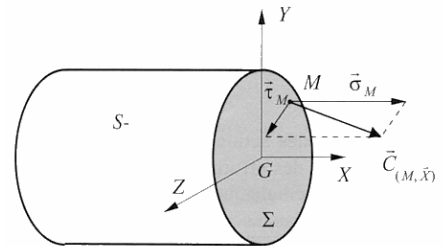
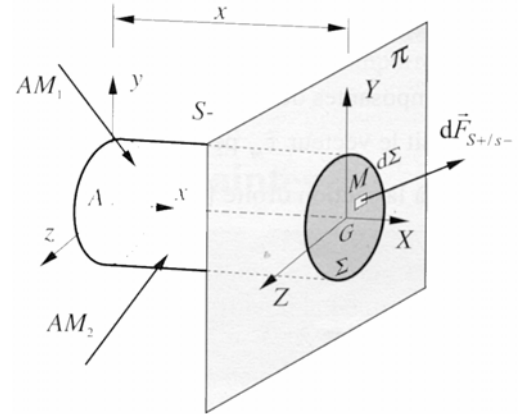
5-1- Définition.

Le vecteur contrainte $\vec{C}$ est le rapport entre l'action mécanique $d\vec{F}$, qui s'exerce sur l'élément de surface $d\Sigma$ de la section Σ , sur la surface $d\Sigma$.

$$\vec{C} = \frac{d\vec{F}}{d\Sigma} = \sigma_M \cdot \vec{x} + \vec{\tau}_M$$

tel que $\left| \begin{array}{l} \sigma : \text{contrainte normale} \\ \tau_M : \text{contrainte tangentielle} \end{array} \right.$

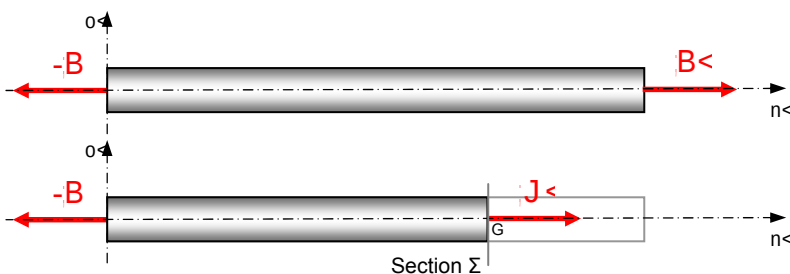
$$\vec{C} = \frac{d\vec{F}}{d\Sigma} = \sigma_M \cdot \vec{x} + \tau_y \cdot \vec{y} + \tau_z \cdot \vec{z}$$



5-2- Détermination des contraintes suivant le type de sollicitation.

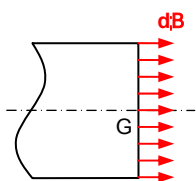
TRACTION

Définition :



$$_G \{T_{coh}\}_R = \begin{Bmatrix} N & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_R$$

Contrainte normale :



Chaque élément de surface $\Delta\Sigma$ supporte un effort de traction δB parallèle à la ligne moyenne. Il y a répartition uniforme des contraintes dans la section droite. D'où :

$$\sigma = \frac{N}{S}$$

σ : contrainte normale en Mpa ou en N/mm^2
 N : effort normal en N
 S : aire de la section droite en mm^2

Condition de résistance :

- R_e la résistance élastique du matériau (en Mpa) ;
- s un coefficient de sécurité ($s > 1$) ;
- R_{pe} la résistance pratique à l'extension, avec $R_{pe} = \frac{R_e}{s}$;

Alors, la condition de résistance s'écrit :

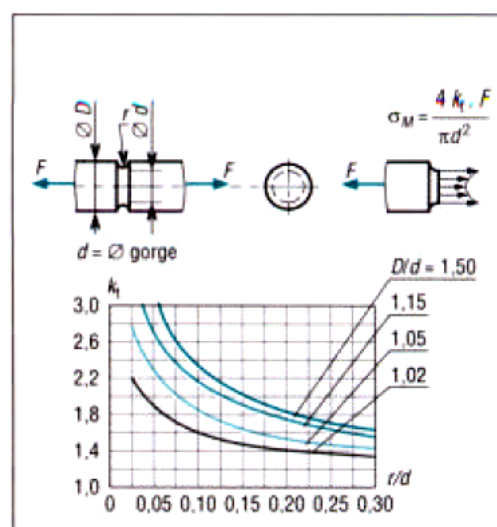
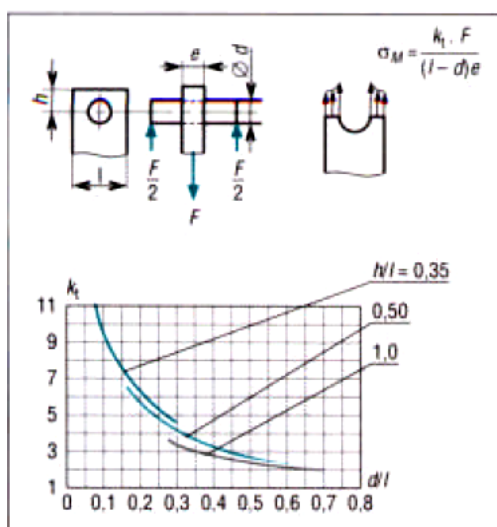
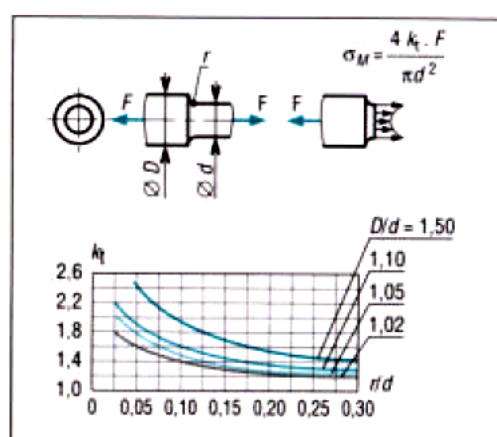
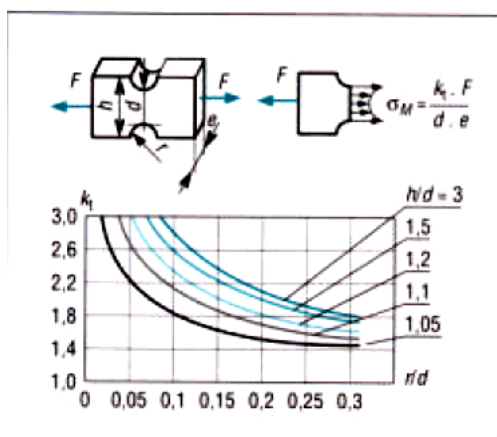
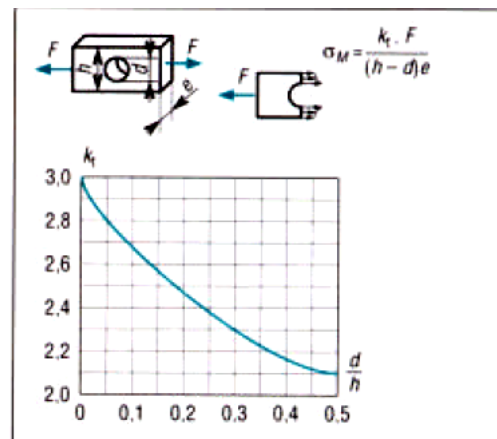
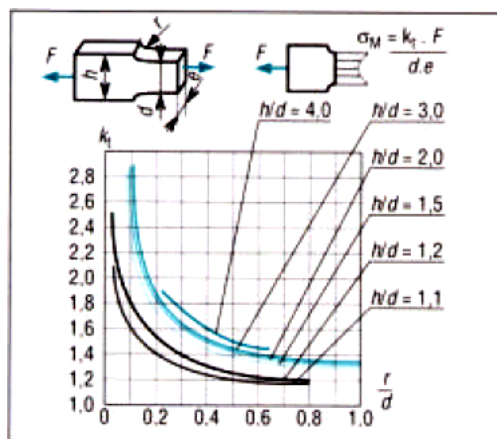
$$\sigma \leq R_{pe}$$

Phénomène de concentration de contrainte.

Lorsque les poutres étudiées présentent de brusques variations de sections (trous, gorges, épaulements...), la relation $\sigma = \frac{N}{S}$ n'est plus applicable. En effet, au voisinage du changement de section, la répartition des contraintes n'est plus uniforme et présente des extremums. Le maximum est atteint pour les points situés à proximité des variations : on dit qu'il y a **concentration de contraintes** en ces points. La valeur de la contrainte est alors donnée par :

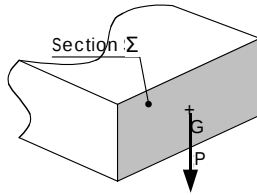
$$\sigma_{\max} = K_t \cdot \sigma_0 \quad \text{avec} \quad \sigma_0 = \frac{N}{S}$$

K_t est appelé le coefficient de **concentration de contraintes**. K_t dépend de la forme de la section et du type de la variation (voir tableaux suivants).



CISAILLEMENT

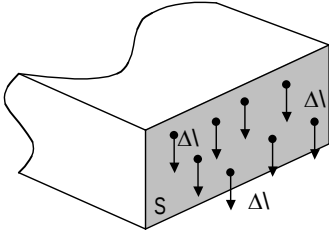
Définition :



$${}_G \{T_{coh}\}_R = \begin{Bmatrix} 0 \\ T_y \\ T_z \\ 0 \end{Bmatrix}_R$$

Dans nos problèmes, nous aurons souvent soit $T_y=0$ ou soit $T_z=0$.

Contrainte de cisaillement :



Chaque élément de surface $\Delta\Sigma$ supporte un effort de cisaillement $\Delta\tau$ contenu dans le plan (Σ).

Il y a répartition uniforme des contraintes dans la section droite. D'où :

$$\tau = \frac{\vec{T}}{S}$$

τ : contrainte tangentielle en Mpa ou N/mm²

$\vec{T}$: effort tranchant en N

S : aire de la section droite cisailée en mm²

Condition de résistance :

- R_{eg} la résistance élastique au cisaillement du matériau (en Mpa) ;
- s un coefficient de sécurité ;

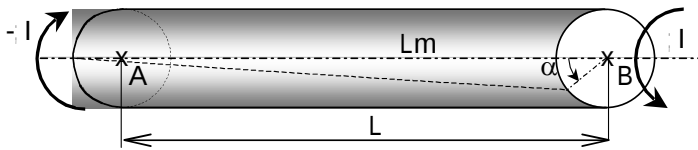
- $\tau_{adm} = R_{pg}$ la résistance pratique au cisaillement, avec $\tau_{adm} = R_{pg} = \frac{R_{eg}}{s}$;

Alors, la condition de résistance s'écrit :

$$u \leq \leq u_{adm}$$

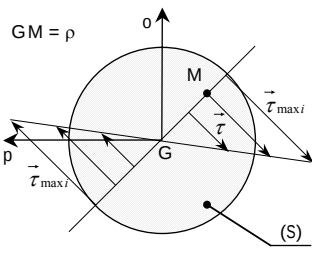
TORSION

Définition :



$${}_G \{T_{coh}\}_R = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ Mt \end{Bmatrix}_R$$

Contrainte tangentielle :



$$\tau = \frac{M_t \cdot \rho}{I_G}$$

M_t : Moment de torsion en N.mm

ρ : rayon GM en mm

I_G : moment quadratique de la section Σ par rapport au point G en mm⁴

Tableau des moments quadratiques des sections les plus courantes.

$I_G = \frac{bh}{12}(b^2 + h^2)$	$I_G = \frac{a^4}{6}$	$I_G = \frac{\pi d^4}{32}$	$I_G = \frac{\pi}{32}(D^4 - d^4)$

Condition de résistance :

- R_{eg} la résistance élastique au cisaillement du matériau (en Mpa) ;
- s un coefficient de sécurité ;

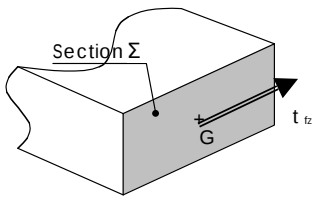
- R_{pg} la résistance pratique au cisaillement, avec $R_{pg} = \frac{R_{eg}}{s}$;

Alors, la condition de résistance s'écrit :

$$u_{max} \leq R_{pg}$$

FLEXION PURE

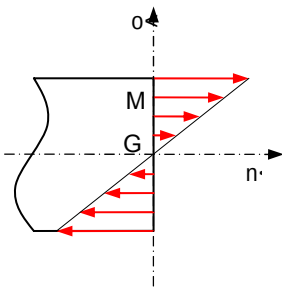
Définition :



$${}^G \{T_{coh}\}_R = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & M_{fy} \\ 0 & M_{fz} \end{Bmatrix}_R$$

Dans nos problèmes nous aurons souvent M_{fy} ou M_{fz} nul.

Contrainte normale :



$$\sigma = \frac{M_{fz}}{I_{Gz}} y$$

σ : contrainte normale en Mpa

M_{fz} : Moment fléchissant en N.mm

y : ordonnée du point M en mm

I_{Gz} : moment quadratique de la section par rapport à l'axe (G, p) en mm⁴

Tableau des moments quadratiques des sections les plus courantes.

$I_{Gz} = \frac{bh^3}{12}$	$I_{Gz} = \frac{a^4}{12}$	$I_{Gz} = \frac{\pi d^4}{64}$	$I_{Gz} = \frac{\pi}{64} (D^4 - d^4)$

Condition de résistance :

- R_e la résistance élastique du matériau (en Mpa) ;
- s un coefficient de sécurité ($s > 1$) ;
- R_{pe} la résistance pratique à l'extension, avec $R_{pe} = \frac{R_e}{s}$;

Alors, la condition de résistance s'écrit :

$$\sigma_{\max} \leq R_{pe}$$

Notions sur les coefficients de sécurité

Pour qu'une structure (machine, véhicule...) puisse supporter en toute sécurité les charges qui normalement la sollicitent, il suffit qu'elle puisse résister à des charges plus élevées. La capacité à supporter ces charges constitue la résistance de la structure. Le coefficient de sécurité s est

$$s = \frac{\text{charge admissible}}{\text{charges exercées}} = \frac{\text{résistance réelle}}{\text{résistance nécessaire}}$$

La sécurité est obtenue si, sous charge

- les déformations du matériau restent élastiques
- la rupture du matériau n'est pas atteinte

donc

$$s = \frac{R_e}{R_p} = \frac{\text{résistance élastique}}{\text{résistance pratique}} \quad \text{ou} \quad s = \frac{R_r}{R_p} = \frac{\text{résistance à la rupture}}{\text{résistance pratique}}$$